UCLouvain

FIAL
Un éventail de formations, une multitude d'horizons

La connaissance mathématique

LSC1120A

séance 7

Connaissance mathématique

Deux parties du cours aujourd'hui :

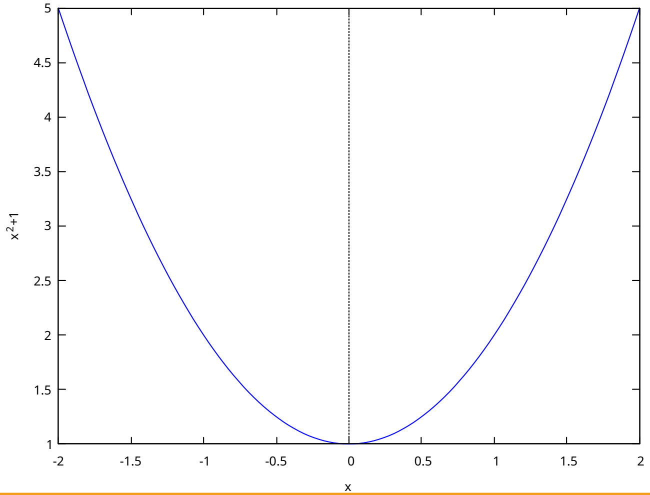
1. La découverte des nombres imaginaires
2. La construction de la connaissance en mathématiques et la relation entre les mathématiques et la science

Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme $P(x)$ de degré n a n valeurs x_i telles que $P(x_i) = 0$ (racines).

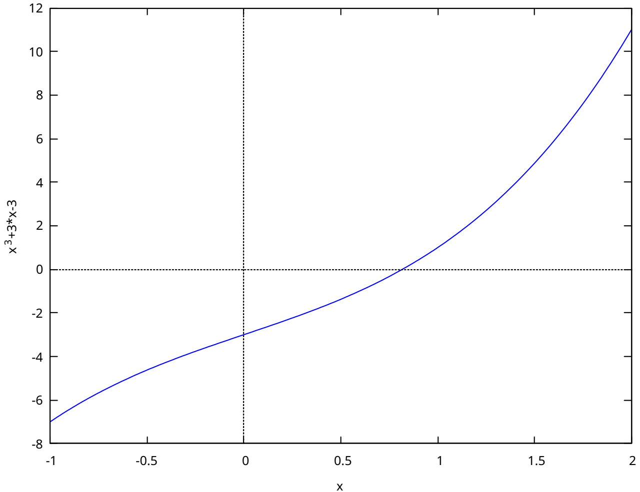
Mais attendons...

$y = x^2 + 1$



Et…

$y = x^3 + 3x - 3$



Les nombres complexes

Racines approximatives de $y = x^3 + 3x - 3$:

- 0.8177
- $1.4892(0.8660i - 0.5) - 0.6715(-0.8660i - 0.5)$
- $1.4892(-0.8660i - 0.5) - 0.6715(0.8660i - 0.5)$

Les nombres complexes

$\mathrm{i} \equiv \sqrt{-1}$

Un nombre complexe a la forme $a + bi$, avec a la “partie réelle” et b la “partie imaginaire”.

Parenthèse : Le patronage

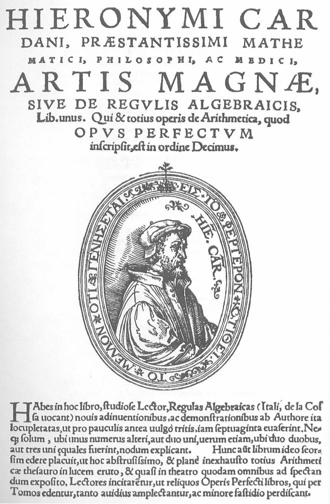
[Les mathématiciens] gagnaient leur vie en se défiant les uns les autres dans des concours publics de résolution de problèmes, et le vainqueur remportait tout : un prix en argent, peut-être, certainement la « gloire » et, avec un peu de chance, le soutien d'un riche mécène admiratif.

[...]

Chacun a proposé trente problèmes à l'autre, et si Fior n'a pu résoudre aucun de ceux de Tartaglia, Tartaglia a résolu tous ceux de Fior. (Nahin)

Gerolamo Cardano (1501-1576)

Ars Magna (1543)



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Son problème

Disons qu'on veut diviser **10** en deux parties, dont le produit est **40** :

$$x(10 - x) = 40$$

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

$$\frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2} = x$$

$$5 \pm \sqrt{-15} = x$$

Son problème

$5 \pm \sqrt{-15}$

Il y a la racine carrée d'un nombre négatif là. Mais quand on travaille *comme si* c'était un nombre traditionnel, tout marche et on arrive à un nombre réel.

Qu'est-ce qui se passe ?

Les nombres imaginaires dans des solutions réelles

C'était une idée farfelue dans le jugement de beaucoup, et j'ai longtemps été du même avis. Toute l'affaire semblait reposer sur un sophisme plutôt que sur la vérité. Pourtant, j'ai cherché longtemps, jusqu'à ce que je prouve que c'était bien le cas. (Bombelli, étudiant de Cardano)

Et alors…

Environ 1600 :

- Les nombres imaginaires sont acceptés *à contrecœur* dans les calculs, après une longue période où les racines complexes étaient déclarées « impossibles ».
- La principale raison est le fait que l'on obtient des *nombres complexes* dans les équations pour les *racines réelles*.
- Personne n'est content.

La question demeure : qu'est-ce que $\sqrt{-1}$?

Euler (1770)

Toutes les expressions telles que $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, etc. sont donc des nombres impossibles ou imaginaires, puisqu'ils représentent des racines des quantités négatives ; et de ces nombres, on peut véritablement affirmer qu'ils ne sont ni rien, ni supérieurs à rien, ni inférieurs à rien, ce qui les rend nécessairement imaginaires ou impossibles.

Un long chemin

- Wallis (1685) : Par une construction géométrique, **i** a peut-être quelque chose à voir avec le fait de soulever perpendiculairement une figure géométrique de l'axe x ?
- Wessel (1797) : La vision moderne : un plan dont l'axe x représente la partie réelle et l'axe y la partie imaginaire. Les nombres complexes représentent donc des vecteurs dans ce plan, à partir de l'origine. Nous les additionnons avec l'addition vectorielle, et nous les multiplions en multipliant leurs longueurs et en additionnant leurs angles de phase.

Un long chemin

- Jusque dans les années 1880, les nombres complexes étaient considérés comme « indésirables » dans les calculs.
- Mais après environ 1900, la partie imaginaire (ou « angle de phase ») est essentielle pour comprendre l'électricité. Dans les années 1930, deux ingénieurs (William Hewlett et David Packard) inventent l'« oscillateur à déphasage », qui produit une onde sinusoïdale accordable en, plus ou moins, manipulant la partie imaginaire d'un courant électrique.

Qu’est-ce que cette connaissance ?

Comment arrivons-nous à une connaissance **de quelque chose idéalisé et abstrait,** mais qui enfin **a une utilité dans le monde réel ?**

Autrement dit, **quel genre de connaissance génère les mathématiques ?**

Problèmes d’échecs

Euclide sur l'infinité des nombres premiers

Tout nombre est soit premier, soit divisible par un nombre premier. Supposons qu'il existe un nombre finie de nombres premiers, et que P soit le dernier nombre premier. Considérons Q :

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot P) + 1$$

Est-ce que Q est premier ou non ? S'il l'est, alors P ne peut pas être le dernier nombre premier, car Q est plus grand que P. Si ce n'est pas le cas, il doit y avoir *un* nombre premier plus grand que P, car Q n'est divisible par *aucun* des nombres premiers de cette liste. Dans les deux cas, il existe un nombre premier plus grand que P, ce qui est une contradiction. *QED*

Pythagore sur les nombres irrationnels

Si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors il peut être écrit comme :

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$,

avec a et b choisis de telle sorte qu'on ne puisse plus réduire cette fraction. On peut donc l'écrire comme suit :

$2 = \frac{a^2}{b^2}$

$a^2 = 2b^2$

Pythagore sur les nombres irrationnels

$a^2 = 2b^2$

Il est évident que a^2 est pair, puisqu'il est exprimable sous la forme de $2x$. Chaque fois que l'on élève au carré un nombre impair, on obtient un autre nombre impair. Donc a doit être pair. Cela signifie que

$a = 2c$

pour une certaine valeur de c. Mettre ça pour a, et on a :

Pythagore sur les nombres irrationnels

$(2c)^2 = 2b^2$
$4c^2 = 2b^2$
$2c^2 = b^2$

Encore une fois, puisque b^2 est pair, cela signifie que b est pair. Nous savons donc que a et b sont tous deux pairs. Mais attendez ! Il y a quelques slides, nous avons dit que la fraction $\frac{a}{b}$ était *aussi réduite que possible*. Si a et b sont tous deux pairs, cela signifie que nous pouvons éliminer un 2 de la fraction. C'est donc une contradiction ! On ne peut donc pas écrire $\sqrt{2}$ de cette façon, ce qui signifie qu'il est irrationnel. *QED*

La connaissance mathématique

Qu'est-ce que ces preuves nous disent ? De quoi parlent-ils ?

Est-ce qu'on **invente** ou **découvre** les vérités mathématiques ?

Les objets mathématiques

- **Platonisme :** les objets mathématiques sont des objets abstraits, « là-bas » dans le monde des idées platonicien ; nous *découvrons* les vérités mathématiques
- **Formalisme :** les objets mathématiques sont définis par des jeux que nous jouons en utilisant des symboles mathématiques ; nous *inventons* les vérités mathématiques en inventant les jeux
- **Intuitionnisme :** les objets mathématiques sont construits en faisant des preuves à partir de bases logiques (*inventer*)
- **Structuralisme :** les objets mathématiques n'existent pas vraiment, mais les *structures* dont ils font partie existent (*découvrir*)
- **Empirisme :** les vérités mathématiques sont dérivées de l'expérience ordinaire, tout comme la science (*découvrir*)
- **Fictionnalisme :** les vérités mathématiques ne sont que des fictions utiles que nous nous racontons à nous-mêmes (*inventer*)

Le platonisme mathématique

Les entités étudiées par la physique, la biologie et les autres sciences de la nature sont localisées spatio-temporellement –elles sont *concrètes* ; en revanche, les entités étudiées par les mathématiques (les nombres, les ensembles, les groupes, les fonctions etc.) ne semblent pas être localisées nulle part dans l'espace ou dans le temps –elles sont *abstraites*. (Bravo)

Le platonism mathématique

Nous ne pouvons pas observer un nombre comme nous observons une planète. Nous ne pouvons pas non plus, faire des expériences pour tester une hypothèse mathématique. Comment acquérons-nous alors la connaissance mathématique ? Celle-ci est une question fondamentale pour la philosophie des mathématiques, et pour le platonisme en particulier. (Bravo)

Les objets mathématiques

- **Platonisme :** les objets mathématiques sont des objets abstraits, « là-bas » dans le monde des idées platonicien ; nous *découvrons* les vérités mathématiques
- **Formalisme :** les objets mathématiques sont définis par des jeux que nous jouons en utilisant des symboles mathématiques ; nous *inventons* les vérités mathématiques en inventant les jeux
- **Intuitionnisme :** les objets mathématiques sont construits en faisant des preuves à partir de bases logiques (*inventer*)
- **Structuralisme :** les objets mathématiques n'existent pas vraiment, mais les *structures* dont ils font partie existent (*découvrir*)
- **Empirisme :** les vérités mathématiques sont dérivées de l'expérience ordinaire, tout comme la science (*découvrir*)
- **Fictionnalisme :** les vérités mathématiques ne sont que des fictions utiles que nous nous racontons à nous-mêmes (*inventer*)

Quelques caractéristiques de la connaissance mathématique

nécessité — la connaissance mathématique, correctement dérivée, *n'aurait pas pu être autrement*

beauté — très difficile à définir, mais facile à reconnaître, même pour les novices

sérieux — différencie les vraies mathématiques des problèmes d'échecs ; quelque chose comme l'importance de l'interconnexion des concepts mathématiques

Le sérieux

- Preuve des nombres premiers d'Euclide : montre qu'il y a une infinité de travaux à faire en théorie des nombres et que nous ne serons jamais « à court » de nombres premiers
- Preuve des nombres irrationnelles de Pythagore : facile à étendre à $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{17}$, etc. ; montre qu'il y a une infinité d'*irrationnels* qui ne fonctionnent pas comme les rationnels (en fait, *beaucoup* plus d'irrationnels que de rationnels)
- N'a **rien à voir** avec les applications pratiques

Approximating Pi

Susan Gomez, responsable du sous-système Guidance Navigation and Control (GNC) de la Station spatiale internationale pour la NASA, a déclaré que les calculs impliquant pi utilisent 15 chiffres pour le code GNC et 16 pour le Space Integrated Global Positioning System/Inertial Navigation System (SIGI). Le SIGI est le programme qui contrôle et stabilise les vaisseaux spatiaux pendant les missions. (*Scientific American*)>

De quoi parlent les mathématiques ?

On ne sait vraiment pas. Mais on a confirmé à maintes reprises que cette connaissance est **essentielle** pour la science et la vie quotidienne.

L’indispensabilité des mathématiques

1. On doit croire à l’existence des entités indispensables pour nos meilleures théories scientifiques.
2. Les entités mathématiques sont indispensables pour la science.
3. On doit croire à l’existence des entités mathématiques. (Bravo)